

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI ALCUNI TEOREMI DI ANALISI DIFFERENZIALE VETTORIALE

GEOMETRIC INTERPRETATION OF THE VECTOR DIFFERENTIAL ANALYSIS THEOREMS

Alberto Sacchi

PREMESSA

E' opinione diffusa che ogni teorema, sia esso di Analisi, Geometria o di Teoria dei Numeri, sia nato dalla osservazione di un fenomeno fisico specifico e dalla successiva generalizzazione ed estrapolazione a campi più estesi o a varietà pluridimensionali.

Assume allora particolare interesse la illustrazione geometrica di tale fenomeno quale premessa ad una definizione rigorosa del Teorema di riferimento ed alla sua successiva dimostrazione (che non rientrano negli obiettivi del presente scritto.)

Il presente scritto ha carattere decisamente divulgativo; la geometrizzazione delle equazioni tende a rendere intuitivi i concetti espressi.

ABSTRACT

Interpretazione ed illustrazione geometrica dei Teoremi della Divergenza, del Gradiente e del Rotore.

Interpretation and geometric illustration of Divergence, Gradient and Rotor Theorems

TEOREMA DELLA DIVERGENZA (Teorema di Ostrogradskij)

Il flusso del vettore V attraverso la superficie chiusa S coincide con l'integrale della divergenza di V svolto nel volume W di cui la superficie S è frontiera.

$$\iint_W \nabla \vec{V} dW = \iint_S \vec{V} ds \quad (1.1)$$

Alcune premesse utili:

- la definizione di Divergenza di un campo vettoriale \vec{V} è ;

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{(\partial V_x)}{(\partial x)} + \frac{(\partial V_y)}{(\partial y)} + \frac{(\partial V_z)}{(\partial z)} = \nabla \vec{V}$$

- così come la derivata prima $Df(x_0)$ della funzione $f(x)$ fornisce una indicazione dell'andamento locale della funzione stessa ($Df(x_0) > 0$ indica una andamento locale in crescita e viceversa) la divergenza positiva di un campo vettoriale indica la tendenza a “divergere” dalle condizioni esistenti nel punto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Sia \mathbf{V} un vettore riferito ad un fenomeno fisico vettoriale A_v ; in particolare \mathbf{V} potrebbe rappresentare il vettore spostamento di un corpo A di massa m all'interno di un volume W
Sia:

V il modulo di \mathbf{V} ovvero la misura quantitativa di A_v (nel caso particolare di cui sopra A_v verrebbe espresso in $\text{kg/m}^2\text{s}$)

$\nabla \cdot \mathbf{V}$ la differenza tra i flussi di \mathbf{V} entrante ed uscente da uno qualsiasi punto del volume W

Ne segue che $\int \nabla \cdot \vec{V} dW$ rappresenta il flusso di \mathbf{V} globalmente entrante (od uscente) dal volume W od anche il valore quantitativo di Av (cioè la massa) entrante (od uscente) dal volume W nel tempo Δt .

Il Principio di continuità di Av (conservazione della massa) garantisce che il valore quantitativo di Av entrante (od uscente) dal volume W attraverso necessariamente la frontiera S di W cioè :

$$\left(\iint_s \vec{v} ds \right) \quad (1.2)$$

TEOREMA DEL ROTORE (Teorema da Kelvin-Stokes)

Il flusso del rotore di un campo vettoriale \vec{V} attraverso una superficie S è uguale alla circuitazione di \vec{V} lungo la frontiera Γ di S .

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} d\Gamma = \iint_S \nabla \times \vec{v} dS \quad (2.1)$$

Premessa utile alla interpretazione fisico-geometrica dalla equazione (2.1) è la geometrizzazione dell'operatore Rotore.

Sia dato un quadrato elementare $dx \times dy$ immerso in una corrente fluida di velocità \mathbf{V} .

Sia inoltre (Fig 2.1)

$$V_1 = V_x$$

impone una rotazione antioraria al quadrato

$$V_2 = V_x + \delta V_x / \delta y$$

impone una rotazione oraria

$$V_4 = V_y + \delta V_y / \delta x$$

impone una rotazione antioraria

$$V_3 = V_y$$

impone una oraria

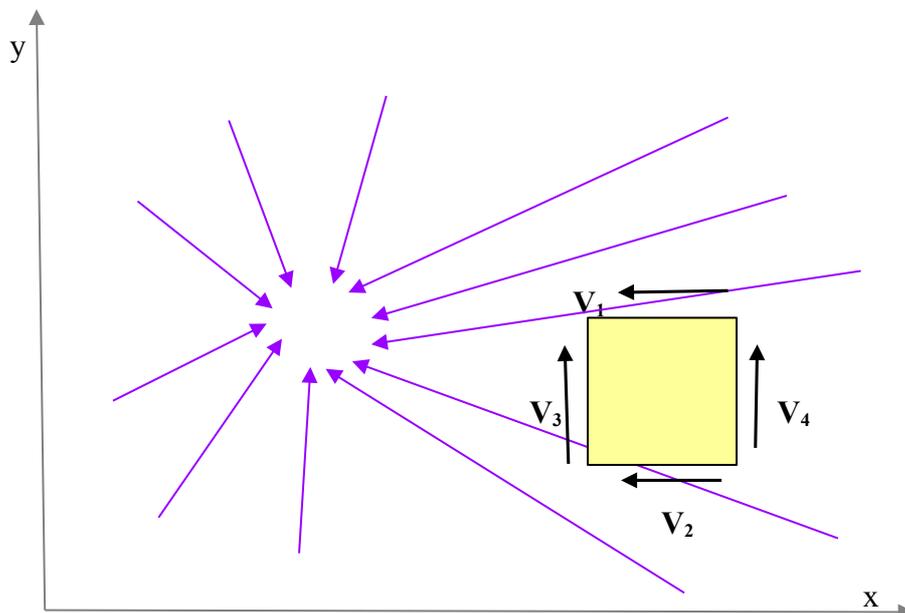


FIG.2.1

La rotazione complessiva netta del quadrato è quindi:

$$\begin{aligned}
 (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) &= [V_x - (V_x - \delta V_x / \delta y)] - [V_y - (V_y + \delta V_y / \delta x)] = \\
 &= \frac{(\partial V_x)}{(\partial y)} - \frac{(\partial V_y)}{(\partial x)} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Passando da uno spazio bidimensionale ad uno tridimensionale, cioè sostituendo il quadrato con un cubo elementare e riportando la relazione soprascritta ai piani xz ed yz si ottiene:

$$\text{Rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{k} \quad (2.3)$$

Rot \mathbf{V} rappresenta la componente rotativa dello spostamento locale di un campo vettoriale dove il vettore rotazione risulta normale al piano del disegno (FIG.2.1).

L' circuitazione del vettore \vec{V} lungo la linea l è dato dal prodotto scalare:

$$|\vec{V}| \cdot |d\vec{l}| \cos \alpha \text{ essendo } \alpha \text{ l'angolo tra } \vec{V} \text{ e } d\vec{l}$$

Con riferimento al quadrato elementare $dx \cdot dy$ di FIG.2.1 ed imponendo una circolazione antioraria lungo il suo perimetro si ha:

$$\begin{aligned}
 V_1 \cdot dx \cdot \cos 0 &= V_1 \cdot dx = V_x dx \\
 V_3 \cdot dy \cdot \cos \pi &= -V_3 \cdot dy = -V_y dy \\
 V_2 \cdot dx \cdot \cos \pi &= -V_2 dx = -\left(V_x - \frac{(\partial V_x)}{(\partial y)} \right) dx = -V_x dx + \frac{(\partial V_x)}{(\partial y)} dx \\
 V_4 \cdot dy \cdot \cos 0 &= V_4 dy = \left(V_y + \frac{(\partial V_y)}{(\partial x)} \right) dy = V_y dy + \frac{(\partial V_y)}{(\partial x)} dy
 \end{aligned}$$

per cui la circolazione lungo il percorso chiuso costituito dal perimetro del quadrato elementare è:

$$\begin{aligned}
 (V_1 - V_2) - (V_3 - V_4) &= [V_x dx - (V_x dx - \frac{(\partial V_x)}{(\partial y)} dx)] - [V_y - (V_y + \frac{(\partial V_y)}{(\partial x)} dy)] \\
 &= \frac{(\partial V_x)}{(\partial y)} dx - \frac{(\partial V_y)}{(\partial x)} dy \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

La (2.4) corrisponde alla definizione di Rot \mathbf{V} riferita al quadrato elementare $dx dy$ come da (2.2); è pertanto lecito affermare che:

la circuitazione di \vec{V} lungo il perimetro di un quadrato elementare corrisponde al Rot di \vec{V} riferito al medesimo quadrato.

Sia S una superficie generica suddivisibile in quadrati elementari dx dy

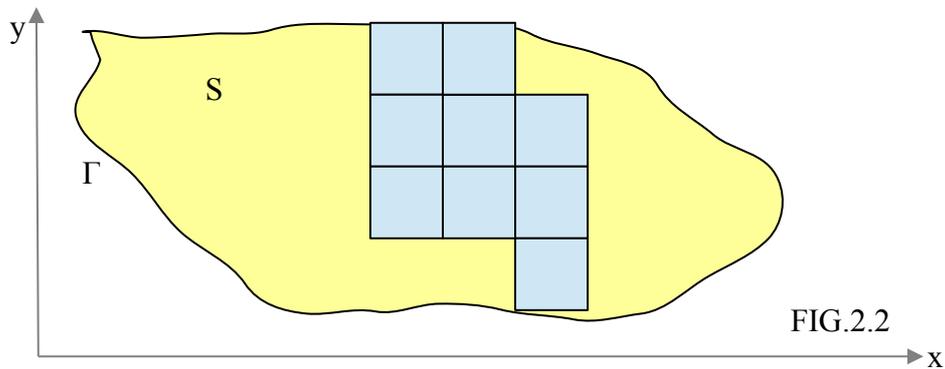


FIG.2.2

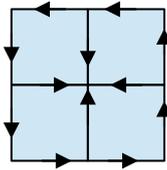


FIG.2.3

In FIG.2.3 è mostrato come il contributo alla circuitazione dei lati adiacenti di quadrati elementari affiancati sia nullo; in tale modo la circuitazione sul perimetro di quadrati elementari affiancati risulta equivalente alla somma della circuitazione dei singoli quadrati elementari.

Estendendo all'intero perimetro Γ di S si ottiene:

$$\text{Circuitazione di } \vec{V} \text{ su } \Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{V} d\Gamma$$

Analogamente la somma delle superfici dx.dy dei singoli quadrati elementari corrisponde alla superficie S (FIG.2.2) e quindi:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} d\Gamma = \iint_S \nabla \vec{V} dS$$

TEOREMA DEL GRADIENTE (Corollario del teorema di Stokes)

L'integrale secondo una generica linea λ di un campo vettoriale K , rappresentato come gradiente di un campo scalare φ , è ottenibile quale differenza tra i valori di φ agli estremi della curva su cui si è svolta l'integrazione.

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \int_{\lambda} \nabla \varphi d\lambda \quad (3.1)$$

Dove q e p sono gli estremi di integrazione del tratto λ .

Ne segue che per un campo conservativo il lavoro sviluppato da una forza F è indipendente dal percorso λ e dipende unicamente dai suoi estremi .

Si consideri un corpo M di massa m soggetto all'azione di un campo gravitazionale di accelerazione g ; M risulterà soggetto ad un campo vettoriale di forza \vec{F} di componenti cartesiane $F = (F_x=0; F_y = mg; F_z = 0)$

Il lavoro di F secondo una generica curva λ è:

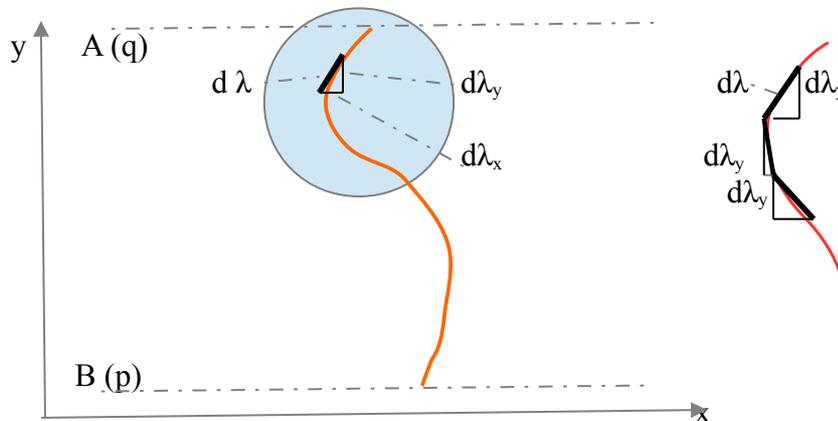
$$L = \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} \quad \text{prodotto scalare}$$

ossia:
$$L = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$$

Siano $d\lambda_x; d\lambda_y; d\lambda_z$ le componenti cartesiane di $d\lambda$ da cui:

$$dL = F_x \cdot \lambda_x + F_y \cdot \lambda_y + F_z \cdot \lambda_z = F_y \lambda_y \quad \text{essendo } F_x = F_z = 0$$

Geometricamente:



Appare evidente come:

$$\sum_{(A(q))}^{(B(p))} d\lambda_y = A \rightarrow B = \overline{AB} = \int_A^B d\lambda_y$$

ossia il lavoro del campo vettoriale \vec{F} dipende unicamente dagli estremi e non dalla geometria del percorso.

BIBLIOGRAFIA

Georg Joos, Ira M. Freeman. *Theoretical Physics*. Courier Dover Publications, 1987

R.G. Lerner, G.L. Trigg, *Encyclopaedia of Physics*, 2nd, VHC publishers, 1994

M. Hazewinkel, "A tutorial introduction to differentiable manifolds and calculus on manifolds" W. Schiehlen (ed.)

Williamson, Richard and Trotter, Hale. (2004). *Multivariable Mathematics, Fourth Edition*, p. 374. Pearson Education, Inc.